

Joachim Stiller

Zur Entropie schwarzer Löcher

Alle Rechte Vorbehalten

Die Entropie Schwarzer Löcher und die Plancksche Länge

„Alles begann damit, dass Stephen Hawking an einem Novemberabend des Jahres 1970 beim zu Bett Gehen über Schwarze Löcher nachdachte. Da er an amyotrophischer Lateralsklerose leidet, (was ihn an den Rollstuhl bindet) ist das zu Bett Gehen für ihn eine schwierige und langsame Prozedur. Da hatte er viel Zeit nachzudenken. Seine Gedanken kreisten nur um einen Punkt: Wieviel Gravitationsstrahlung kann entstehen, wenn zwei Schwarze Löcher kollidieren und sich vereinigen? Doch was ist Gravitationsstrahlung?

Wenn sich zwei Sterne oder Schwarze Löcher umkreisen, verursachen sie durch ihre Gravitation eine starke Raumzeitkrümmung. Aus dieser Krümmung gehen "Kräuselungen der Raumzeit" hervor, die sich radial, mit Lichtgeschwindigkeit ausbreiten. (Das sieht den Ringen ähnlich, die entstehen, wenn man einen Stein ins Wasser fallen lässt.) Diese "Kräuselungen der Raumzeit" werden "Gravitationswellen" genannt, da nach Einsteins allgemeiner Relativitätstheorie Gravitation und Krümmung der Raumzeit dasselbe sind. Diese Gravitationswellen bewirken, dass sich die beiden umkreisenden Schwarzen Löcher allmählich immer weiter auf Spiralen annähern und beschleunigt werden. Dabei wird die erwähnte Gravitationsenergie freigesetzt, die zum Teil in die Gravitationswellen fließt und zum Teil zur Erhöhung der Umlaufgeschwindigkeit der Löcher beiträgt. (siehe: Kip Thorne: "Gekrümmter Raum und verbogene Zeit"; S. 410)

Stephen Hawking fragte sich nun, wieviel dieser Gravitationsstrahlung frei wird, wenn sich zwei Schwarze Löcher vereinigen. Bei dieser Vereinigung erreichen sie dann fast Lichtgeschwindigkeit und ihre Horizonte verschmelzen einander.

Als Hawking so über das Problem nachdachte, traf es ihn wie ein Blitz: "Meine Entdeckung versetzte mich in solche Aufregung, daß ich in dieser Nacht nicht viel Schlaf fand." (siehe Stephen Hawking: "Eine kurze Geschichte der Zeit")

Er erkannte plötzlich, dass sich die Fläche des Horizontes eines Schwarzen Loches nach einem Zusammenstoß mit einem anderen Schwarzen Loch vergrößern musste. Genauer gesagt konnte er beweisen, dass die Oberfläche des nach der Vereinigung entstandenen Schwarzen Loches größer sein musste, als die Oberflächen der ursprünglichen Schwarzen Löcher zusammen. Daraus folgt nun, dass das neugebildete Schwarze Loch eine große Energie (Masse) besitzt und so bei seiner Entstehung nicht allzuviel an Gravitationsstrahlung freigesetzt werden konnte. Hawking nannte diese Entdeckung sein "Flächenvergrößerungstheorem". (Kip Thorne: "Gekrümmter Raum und verbogene Zeit"; S. 476)

Ein Jahr vor dieser Entdeckung Hawkings entdeckte ein neunzehnjähriger Doktorand aus Princeton, dass Gleichungen für langsame Veränderungen Schwarzer Löcher bestimmten Gleichungen der "Thermodynamik" ähnelten.

Die Thermodynamik, wie vielen bekannt sein dürfte, beschäftigt sich zum Beispiel mit Wärme, Druck und Temperatur. Benennenswerte Begriffe sind dabei: Wärmeübertragung, Wärmeaustausch und Volumenarbeit. Es gibt mehrere Hauptsätze der Thermodynamik, von

denen uns der zweite genauer interessiert. Diesem zweiten Hauptsatz der Thermodynamik ähnelt nämlich unerwartet Hawkings "Flächenvergrößerungstheorem". Das erinnert an eine thermodynamische Größe namens "Entropie".

Was ist das eigentlich, Entropie? Den Oberstufenschülern sollte dieser Begriff zumindest aus dem Chemieunterricht bekannt sein. **Die Entropie S ist ein Maß für die Unordnung in einem bestimmten System.** Und diese Entropie hat eine Eigenschaft, die der 2. Hauptsatz der Thermodynamik aussagt. Er besagt nämlich, dass ein abgeschlossenes, thermodynamisches System in Natur und Technik bestrebt ist, immer die maximale Verteilung (Unordnung) zu erreichen. Das heißt, dass die Entropie eines abgeschlossenen Systems niemals abnehmen kann. Sie bleibt entweder gleich oder erhöht sich bei jedem Vorgang; kurz: $\Delta S \geq 0$.

Um das zu veranschaulichen, denken wir uns ein Gefäß, in dessen Mitte sich eine Trennwand befindet. Auf der einen Seite befinden sich die Gasmoleküle eines Gases, auf der anderen Seite befinden sich die Gasmoleküle eines anderen Gases. Das System besitzt durch die Trennung der verschiedenen Gasmoleküle eine gewisse Ordnung. Nehmen wir aber die Trennwand heraus, so fangen die Gasmoleküle sofort an, sich zu vermischen. Die Unordnung (Entropie) nimmt zu. Setzen wir nun die Trennwand wieder hinein, vermengen sich die unterschiedlichen Gasmoleküle auf beiden Seiten so lange, bis die maximale Verteilung erreicht ist. Würden wir die Trennwand erneut herausnehmen, würden sich die Gasmoleküle auf beiden Seiten des Gefäßes noch einmal untereinander verteilen, bis das Maximum der Entropie im System "Gefäß" erreicht ist. Wir müssten die Gasmoleküle einzeln trennen, um wieder Ordnung in den Laden zu bringen. Man könnte dann sagen, dass wir die Entropie dadurch verringern. Aber selbst wenn wir dazu in der Lage wären, durch gewaltigen Aufwand die Moleküle voneinander zu trennen, so würde dieser Aufwand eine Menge Energie verbrauchen.

Energie wird zum Beispiel bei Verbrennung freigesetzt. Der menschliche Körper verbrennt beispielsweise zur Energieumsetzung Fettzellen. Die auftretenden Verbrennungsprodukte (Kohlendioxid) werden ausgeatmet. Diese Gasmoleküle vermengen sich mit der Atemluft und so steigert sich die Entropie stärker, als sie durch Trennung der Gasmoleküle verringert wurde. (Kip Thorne: "Gekrümmter Raum und verbogene Zeit", S.487)

Nun werden Sie sagen, Menschen können doch mit ihren Händen keine Gasmoleküle trennen. Aber egal, was wir zur Trennung der Moleküle einsetzen würden, die Entropie würde sich durch den Energieaufwand stärker erhöhen, als sie durch das Schaffen von Ordnung verringert werden würde. Es gibt ja auch die Möglichkeit, dass sich die verschiedenen Gasmoleküle, während sie so herumschwirren, in einem kurzen Augenblick wieder von alleine separat auf beiden Hälften des Gefäßes anordnen. Aber die Wahrscheinlichkeit dafür ist so groß wie die, dass Stephen Hawking in seinem Leben noch in ein Schwarzes Loch fliegt. Man kann also immer davon ausgehen, dass die Unordnung, wenn man die Dinge sich selbst überlässt, bis zum Maximum ansteigt. Wenn ich heißes und kaltes Wasser in einen Eimer kippe, ist nicht die eine Hälfte des Eimers voll mit kaltem Wasser, während die andere Hälfte nur heißes Wasser beinhaltet. Das kalte und das heiße Wasser vermischen sich zu warmem Wasser, welches den ganzen Eimer erfüllt.

Die Entropie (Grad der Unordnung) ergibt sich aus der Anzahl der Möglichkeiten, wie Materie in einem bestimmten abgeschlossenen System verteilt sein kann. Damit wir uns das leichter vorstellen können, überlegen wir uns folgendes: Wir haben ein quadratisches Schachbrett, welches allerdings nicht 64 Felder hat, sondern 100. Das heißt also, dass sich 10 Felder entlang jeder Seite befinden. Stellen wir uns nun vor, wir postieren 20 unterscheidbare Schachfiguren auf die nördlichsten zwei Reihen. Es befinden sich also 20 Schachfiguren auf 20 Feldern. Wir wollen diese Schachfiguren gleichmäßig verteilen. Also postieren wir genau eine Schachfigur auf ein Feld. Die Figuren sind auf den 20 Feldern zufällig verteilt, es wird also nicht auf eine Reihenfolge geachtet. Nun wollen wir den Grad der Unordnung ermitteln,

also die Möglichkeiten, diese 20 Schachfiguren gleichmäßig auf die 20 nördlichsten Felder zu verteilen. Wir rechnen also:

$20 \times 20 \times 20 \times 20 \times 20 \times 20 \times 20 \times 20 \times 20 \times 20 \times 20 \times 20 \times 20 \times 20 \times 20 \times 20 \times 20 \times 20 \times 20 \times 20$. Für jede

Figur den Faktor 20, da ja 20 Felder zur Verfügung stehen. Es gibt also 20^{20} Möglichkeiten, die Figuren gleichmäßig zu verteilen, wobei immer eine Figur auf einem Feld steht. Dies ist der Grad der Unordnung. Wegen der Unhandlichkeit dieser großen Zahl ist es besser, den Logarithmus von ihr zu berechnen. Der Logarithmus von 20^{20} ist rund 26. Dies ist die Entropie des Systems der Schachfiguren auf den 20 Feldern. Verteilen wir jetzt einmal die Figuren auf alle 100 Felder, wobei sich wieder nur eine Schachfigur auf einem Feld befinden darf. Wir rechnen:

$100 \times 100 \times 100 \times 100 \times 100 \times 100 \times 100 \times 100 \times 100 \times 100 \times 100 \times 100 \times 100 \times 100 \times 100 \times 100 \times 100 \times 100 \times 100 \times 100$, also 100^{20} . Der Logarithmus dieser Zahl ist 40. Wir haben somit die Entropie von rund 26 auf 40 erhöht, indem wir die Schachfiguren auf eine größere Fläche verteilt haben.

Kehren wir nun zurück zum Flächenvergrößerungstheorem für Schwarze Löcher, welches ja dem zweiten Hauptsatz der Thermodynamik ähnlich war. Hawking fiel das im November 1970 auch auf. Warum hat er dann nicht sofort nach etwas gesucht, was die Horizontfläche des Schwarzen Loches mit seiner Entropie in Beziehung setzt? Die Horizontfläche muss sich beim Zusammenprall zweier Löcher vergrößern, genau wie es die Entropie tut.

Hawking ging stattdessen davon aus, dass so etwas totaler Blödsinn ist. Wie soll ein Schwarzes Loch Entropie besitzen, dachte er. Es besitzt eher das Gegenteil, totale Ordnung. Es besitzt ja nur eine Singularität und einen Ereignishorizont. Außerdem hatte er mitbewiesen, dass Schwarze Löcher "keine Haare haben", das heißt, dass sie nur drei Eigenschaften besitzen: eine Masse, einen Drehimpuls und eine elektrische Ladung. Sie können aber keine zufälligen Eigenschaften besitzen, wie es die Entropie verlangt. (Kip Thorne: "Gekrümmter Raum und verbogene Zeit"; S. 488).

Diese Auffassung teilten die meisten Wissenschaftler der Zeit. Es gab aber einen, der das nicht tat und somit die Meinung Hawkings nicht teilte. Dieser Mann hieß Jacob Bekenstein, ein Doktorand von John Wheeler. Er behauptete felsenfest, dass ein Schwarzes Loch Entropie besitze und diese in unmittelbarem Zusammenhang zu dessen Oberfläche stünde. Er behauptete sogar, dass die Oberfläche des Schwarzen Loches im tieferen Sinne seine Entropie ist.

Bekenstein begründete seine Behauptung folgendermaßen: Hätte ein Schwarzes Loch keinerlei Entropie, würde darin also die absolute Ordnung herrschen, dann könnte man Schwarze Löcher dazu benutzen, um die Gesamtentropie des Universums zu verringern.

Man müsste nur sämtliche Materie nehmen und sie in ein Schwarzes Loch werfen. (Dies geschieht ohnehin, denn Schwarze Löcher saugen ständig Materie in sich hinein.)

Die Materie besteht aus Teilchen unterschiedlichster Art und diese Teilchen besitzen eine gewisse Entropie. Wenn die Materie ins Schwarze Loch gelangt, ist sie vom Rest des Universums abgeschnitten und somit geht auch ihre Entropie verloren. Würde das Schwarze Loch diesen Entropieverlust nicht in irgendeiner Weise ausgleichen, dann würde sich in der Tat die Gesamtentropie des Universums verringern. Dies würde dem 2. Hauptsatz der

Thermodynamik widersprechen, wenn sich die Entropie des Schwarzen Loches nicht in dem Maße vergrößert, wie es Materie in sich aufsaugt. (Kip Thorne: "Gekrümmter Raum und verbogene Zeit"; S.488).

Für Bekenstein war dies ein schlagkräftiges Argument und schnell sah er ein, dass die Fläche des Horizontes ein guter Kandidat für die Entropie war. Hawking blieb jedoch stur und argumentierte, dass diese Verletzung des 2. Hauptsatzes der Thermodynamik nur eine unbedeutende Kuriosität in der Physik sei, die aber keinerlei physikalische Gesetze beeinträchtigt.

Heute ist klar, dass Hawking sich irrte. Bekenstein glaubte weiterhin fest an seine Vermutung. Er arbeitete weiter und überwand allerlei Schwierigkeiten, sodass er am Ende eine Beziehung zwischen Entropie und Fläche aufstellte, wonach möglicherweise der 2. Hauptsatz der Thermodynamik nicht verletzt wurde. Nach seinen Berechnungen war die Entropie eines Schwarzen Loches ungefähr gleich seiner Oberfläche, geteilt durch die Planck-Wheeler

Fläche. Die Planck-Wheeler Fläche $A = \frac{G\hbar}{c^3}$ ist das Quadrat der Planck-Wheeler Länge von $l_P = 1,62 \cdot 10^{-35} \text{ m}$ und beträgt: $A_P = 2,61 \cdot 10^{-70} \text{ m}^2$. Die Planck-Wheeler Länge ist sehr interessant. Sie ist die Längenskala, auf der der uns bekannte Raum aufhört zu existieren und zu einer Art Quantenschaum wird, wie er vermutlich die Singularitäten in Schwarzen Löchern erfüllt.

Berechnen wir einmal die Entropie nach dieser Formel konkret für ein Schwarzes Loch mit einer Oberfläche von 11000 Quadratkilometern: Zunächst wandeln wir die 11000 Quadratkilometer in Quadratmeter um:

$1,1 \cdot 10^4 \text{ km}^2 = 1,1 \cdot 10^4 \cdot (10^3 \text{ m})^2 = 1,1 \cdot 10^4 \cdot 10^6 \text{ m}^2 = 1,1 \cdot 10^{10} \text{ m}^2$ Da die Entropie sich nach $S = \frac{A_{\text{Horizont}}}{A_P}$ berechnen lässt, setzen wir nun die konkreten Zahlen in diese Formel ein:

$$S = \frac{1,1 \cdot 10^{10} \text{ m}^2}{2,61 \cdot 10^{-70} \text{ m}^2} \approx 10^{80}$$

Als Ergebnis kommt also die Zahl 10^{80} heraus. Es handelt sich somit um eine enorm große Entropie. Aber wo kommt sie her? Sind es Atome oder Moleküle, die sich im Innern des Schwarzen Loches befinden? Wenn ja, wie sollten wir das nachweisen? Alles, was sich hinter dem Ereignishorizont befindet, kann von uns nicht eingesehen werden.

Stephen Hawking und die anderen Physiker ließen sich nicht von ihrer Meinung abbringen, obwohl sie selbst von der Ähnlichkeit zwischen den Eigenschaften Schwarzer Löcher und den thermodynamischen Gesetzen beeindruckt waren. Außerdem verhält es sich mit der Entropie genau wie mit der Oberfläche. Wenn man zwei Systeme vereinigt, so ist die Entropie des Gesamtsystems größer, als die Summe der Entropien der Einzelsysteme.

Warum aber waren sie so überzeugt, dass Schwarze Löcher keine Entropie besitzen konnten? Ihre Argumentation war folgende: Jeder Körper, der Entropie besitzt, besitzt auch eine gewisse Temperatur, die von Null verschieden ist. Und jeder Körper, der eine Temperatur über 0K besitzt, sendet auch ein gewisses Maß an Strahlung aus. Das heißt, wenn Schwarze Löcher eine Entropie besitzen würden, müssten sie strahlen. (Kip Thorne: "Gekrümmter Raum und verbogene Zeit"; S.491)

Aber wie kann das sein? Wir wissen doch, dass alle Materie, alle Art von Strahlung nur ins Schwarze Loch hinein, aber nicht wieder heraus kann. Das sah nun auch Bekenstein ein, dass ein Schwarzes Loch nicht strahlen könne, doch er glaubte immer noch an dessen Entropie. Stephen Hawking war es aber, der nachwies, dass Schwarze Löcher doch strahlen. (Siehe: Schwarze Löcher verdampfen durch virtuelle Teilchen)“ (Auszug aus einer Arbeit von Stephan Hähne, Markus Müller und Waldemar Tausendfreund)

Text aus dem Internet

Joachim Stiller

Münster, 2014

Ende

[Zurück zur Startseite](#)